

ИЗБРАННЫЕ ГЛАВЫ АЛГЕБРЫ И АНАЛИЗА

ИНТЕХ, 11 семестр 2003 г.

Лектор А.В.Зарелуа

Литература:

- 1) Кострикин А. И., Введение в алгебру, М.: Наука, 1977. Введение в алгебру. Основы алгебры. М.: Физматлит, 1994.
- 2) Холщевникова Н. Н., Введение в алгебраические структуры, М.: МГТУ Станкин, 1996.
- 3) Бугров Я. С., Никольский С. М., Высшая математика. Кратные интегралы, М.: Наука, 1981.
- 4) Кудрявцев Л. Д., Курс математического анализа, том II, М.: Высшая школа, 1981.

Лекция 1.

1.1 Группы. Группы симметрий и матричные группы.

Алгебраические системы. Аксиомы группы. Подгруппы. Группа G называется *абелевой* (или коммутативной), если $xy = yx$ для всех $x, y \in G$. Примеры групп с явным описанием элементов: $\mathbb{Z}_2 = \{1, -1\}$, $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ (относительно сложения), $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$, $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$, группы невырожденных (обратимых) матриц. Все эти группы, кроме групп матриц, являются коммутативными.

Основной способ получения групп: G есть часть взаимнооднозначных отображений некоторого множества M на себя, сохраняющая некоторые равенства. Примеры:

1) множество всех взаимнооднозначных отображений множества M на себя образует группу, называемую *группой перестановок (элементов) множества M* ; в частности, если M состоит из n элементов, то эта группа называется *симметрической группой Σ_n* . Если элементы множества из n занумеровать, то перестановку его элементов можно записать в виде $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ i_1 & i_2 & i_3 & \dots & i_{n-1} & i_n \end{pmatrix}$, которая означает, что элемент с номером 1 отображается в элемент с номером i_1 , элемент с номером 2 отображается в элемент с номером i_2 , ..., элемент с номером n отображается в элемент с номером i_n .

2) *группа симметрий графа, многоугольника, многогранника* и т.п.: группа взаимнооднозначных (обычно, сохраняющих расстояния) отображений графа, многоугольника, многогранника и т.п. на себя, при котором вершины переходят в вершины, ребра в ребра, грани размерности k в грани размерности k . Эти группы являются подгруппами группы перестановок вершин.

3) *общая линейная группа $GL(n, \mathbb{R})$* — группа взаимнооднозначных отображений векторного (линейного) пространства \mathbb{R}^n , сохраняющих операции сложения векторов и умножения на числа. После выбора базиса в \mathbb{R}^n отождествляется с группой всех невырожденных квадратных $n \times n$ матриц с вещественными коэффициентами.

4) *специальная линейная группа $SL(n, \mathbb{R})$* — подгруппа группы $GL(n, \mathbb{R})$, состоящая из линейных отображений, сохраняющих объем и ориентацию пространства. После выбора базиса в \mathbb{R}^n отождествляется с группой всех невырожденных квадратных $n \times n$ матриц с вещественными коэффициентами с определителем 1.

5) *ортогональная группа* $O(n)$ — подгруппа группы $SL(n, \mathbb{R})$, состоящая из линейных преобразований, сохраняющих расстояния (=группа вращений пространства \mathbb{R}^n). После выбора базиса в \mathbb{R}^n отождествляется с матрицами, столбцы (строки) которых образуют ортонормальную систему векторов.

6) *специальная ортогональная группа* $SO(n) = SL(n, \mathbb{R}) \cap O(n)$ — ортогональные преобразования пространства \mathbb{R}^n с определителем 1.

Чтобы задать группу, необязательно выписывать все элементы этой группы, достаточно указать набор элементов, из разнообразных произведений которых можно получить любой элемент группы (такой набор называется *семейством образующих группы*) и указать *соотношения*, связывающие эти образующие.

Задача 1. Для симметрической группы Σ_n обозначим e_i перестановку i -го элемента множества $M = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ с $(i-1)$ -ым элементом. Доказать

- 1) элементы e_i ($i=2, 3, \dots, n$) порождают всю группу Σ_n ;
- 2) элементы e_i удовлетворяют соотношениям

$$e_i e_j = e_j e_i, \text{ если } |i-j| \geq 2 \text{ и } e_{i+1} e_i e_{i+1} = e_i e_{i+1} e_i \quad (i=1, 2, \dots, n-1) \quad (1)$$

Таким образом, симметрическая группа Σ_n состоит из $n!$ элементов и является группой с $n-1$ образующими e_i и соотношениями (1).

Задача 2. Доказать, что группа симметрий правильного треугольника равна Σ_3 .

Задача 3. Симметрии квадрата $[-1, 1] \times [-1, 1]$ порождаются поворотом t на угол $\pi/2$, отражениями d, D относительно диагоналей $[(-1, -1), (1, 1)]$ и $[(-1, 1), (1, -1)]$, и отражениями v, h относительно вертикальной и горизонтальной оси. Найти порядок этих элементов, геометрический смысл t^2 и доказать

1) $hv = t^2$ (отсюда $vh = t^2$), $dD = t^2$ (отсюда $Dd = t^2$), $dh = t$ (отсюда $hd = t^{-1}$), $Dv = t$ (отсюда $vD = t^{-1}$);

2) следствие 1): группа симметрий квадрата порождается двумя элементами второго порядка d и h ;

3) перестановка вершин $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ не является симметрией квадрата и потому группа симметрий квадрата является собственной подгруппой симметрической группы Σ_n .

Задача 4. Просмотреть изучение общего случая группы симметрий правильного n -угольника (называемой группой диэдра D_n), проведенное в учебнике А. И. Кострикина (стр. 327–328). В частности, запомнить, что группа D_n порождается двумя образующими, циклической перестановкой a вершин и отражением b относительно оси, проходящей через центр и одну из вершин, удовлетворяющими соотношениям $\{a^n = 1, b^2 = 1, abab = 1\}$. Проверить этот факт для группы D_4 симметрий квадрата.

1.2 Гомоморфизмы групп.

Гомоморфизмом $f: G \rightarrow G'$ группы G в группу G' называется отображение, такое, что $f(xy) = f(x)f(y)$ для всех $x, y \in G$. Проверить, что образ $\text{Im } f$ гомоморфизма и ядро $\text{Ker } f$ гомоморфизма являются подгруппами, и что $f(1) = 1$. Взаимнооднозначный гомоморфизм на всю группу называется *изоморфизмом*. Изоморфизм группы на себя называется *автоморфизмом*.

Пример. Четностью перестановки равна 1, если число транспозиций, необходимых для получения из этой перестановки тождественной перестановки, есть четное число, и четность перестановки равна -1 , если указанное число транспозиций есть нечетное число. Можно проверить, что отображение, сопоставляющее перестановке ее четность, является гомоморфизмом. Ядро этого гомоморфизма, состоящее из

четных перестановок n элементов, называется знакопеременной группой \mathfrak{A}_n (A_n). Группа \mathfrak{A}_n замечательна тем, что она является простой в том смысле, что не содержит нормальных подгрупп, кроме тривиальных: 1 и \mathfrak{A}_n .

Задача 5. Доказать, что отображение $\text{Int}_a(x) = axa^{-1}$ является автоморфизмом группы. Этот автоморфизм называется *внутренним автоморфизмом, порожденным элементом a* .

Подгруппа $H \subseteq G$ называется *нормальной*, если $aH = Ha$ или, что тоже самое, $aHa^{-1} = H$ для всех $a \in G$.

Задача 6. Доказать, что ядро любого гомоморфизма всегда является нормальной подгруппой.

Полезные замечания. Любая подгруппа абелевой группы является нормальной. Подгруппа будет нормальной если, и только если, любой внутренний автоморфизм группы переводит эту группу в себя. Поэтому нормальные подгруппы раньше часто называли *инвариантными* подгруппами.

Примеры. Принцип: простейшие элементарные функции являются гомоморфизмами или координатными функциями гомоморфизмов. Действительно, степенная функция $f(x) = x^a$ есть автоморфизм $\mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$; показательная функция $f(x) = a^x$ есть изоморфизм аддитивной группы \mathbb{R} на мультипликативную группу \mathbb{R}^+ ; обратная к показательной, логарифмическая функция $g(x) = \log_a x$ есть изоморфизм мультипликативной группы $\mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$; функции $\cos x$ и $\sin x$ являются координатными функциями гомоморфизма $\exp : \mathbb{R} \xrightarrow{\text{на}} \mathbb{T} \subseteq \mathbb{C}$, что эквивалентно формуле Эйлера $e^{it} = \cos t + i \sin t$. Если видоизменить немного отображение \exp и рассмотреть отображение $\widetilde{\exp}(t) = e^{2\pi it}$, то в этом случае в единицу переходят все целые числа, т.к. $e^{2\pi it} = 1$ для $t \in \mathbb{Z}$, т.е. $\text{Ker } \widetilde{\exp} = \mathbb{Z}$. Обычно ситуации такого рода записывают в виде $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R} \xrightarrow{\widetilde{\exp}} \mathbb{T} \subseteq \mathbb{C}$.

Лекция 2.

2.1 Произведение групп и порядок группы.

Определение. Произведением групп G и G' называется множество $G \times G'$, состоящее из всевозможных пар $(a, a'), a \in G, a' \in G'$, с следующей операцией умножения $(a, a') \cdot (b, b') = (aa', bb')$. В случае аддитивной записи, это множество пар называется (прямой) суммой групп G и G' и обозначается $G \oplus G'$. Порядком группы G называется число $|G|$ элементов этой группы. Порядком элемента $g \in G$ называется наименьшее целое положительное число k , такое, что $g^k = 1$.

Например, порядок произведения групп равен произведению порядков сомножителей: $|G \times G'| = |G||G'|$. Порядок циклической подгруппы, порожденной элементом $g \in G$ равен порядку элемента g .

Задачи. Доказать равенства 1) $\mathbb{R}^+ = \mathbb{R}/\{1, -1\}$; 2) $\mathbb{R} = \mathbb{R}^+ \times \{1, -1\}$; 3) $\mathbb{T}/\{1, -1\} = \mathbb{T}$; 4) $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\} = \mathbb{T} \times \mathbb{R}$.

Следующая простая теорема часто используется при вычислении порядков групп.

Теорема 1. Если H есть подгруппа группы G , то $|G| = |G/H||H|$.

Доказательство. В самом деле, классы смежности образуют разбиение группы G на непересекающиеся подмножества, каждое из которых содержит одно и тоже число элементов, $|H|$. Число классов смежности есть $|G/H|$, откуда $|G| = |G/H||H|$.

Следствие. (Теорема Лагранжа). Порядок конечной группы делится на порядок каждой своей подгруппы. В частности, порядок любого элемента группы делит порядок группы.

2.2 Классы смежности и фактор-группы.

Множество $aH = \{ah \mid h \in H\}$ называется (левым) *классом смежности* элемента a относительно подгруппы H . Классы смежности или не пересекаются или совпадают: если $z \in aH \cap bH$, то $z = ah = bh'$ для некоторых элементов $h, h' \in H$ и потому $ahh^{-1}H = bh'h^{-1}H$. Множество классов смежности называется *фактор-множеством* и обозначается G/H .

Задача 7. Доказать, что отношение $x \sim y \Leftrightarrow x^{-1}y \in H$ является отношением эквивалентности, и что классы эквивалентности по этому отношению совпадают с классами смежности.

Предположим, нам удалось ввести в фактор-множество групповую структуру, таким образом, что каноническое отображение $\theta : G \rightarrow G' = G/H$, сопоставляющее элементу $a \in G$ класс смежности $\theta(a) = aH$, является гомоморфизмом. Тогда, как мы знаем (см. задачу 5) ядро этого гомоморфизма θ должно быть нормальной подгруппой. Итак, необходимое условие превращения фактор-множества G/H в группу есть нормальность подгруппы.

Покажем, что это условие является и достаточным. Предположим H нормальная подгруппа и для классов смежности aH, bH положим $aH \cdot bH = abH$. Надо проверить, что это определение не зависит от выбора представителей a, b этих классов. Если $a' \in aH, b' \in bH$ другие представители, то $a' = ah_1, b' = bh_2$ для некоторых элементов $h_1, h_2 \in H$. Тогда $a'b'H = ah_1bh_2H = ah_1bH = ah_1Hb = aHb = abH$, что и требовалось доказать. Итак, справедлива следующая

Теорема 1. Для того, чтобы в фактор-множестве G/H можно было определить операцию умножения, согласованную с операцией умножения в группе G необходимо и достаточно, чтобы группа G была нормальной подгруппой.

Если указан гомоморфизм группы $\varphi : G \xrightarrow{\text{на}} G'$ на группу G' , то фактор-группа G/H для $H = \text{Ker } \varphi$ изоморфна группе G' , так что для фактор-группы G/H есть готовая модель. Если же H есть произвольная нормальная подгруппа, то описание фактор-группы G/H требует отдельного разговора.

2.3 Подгруппы и фактор-группы группы целых чисел.

Изучим, например, подгруппы и фактор-группы группы \mathbb{Z} . Как было замечено, все подгруппы H абелевой группы \mathbb{Z} являются нормальными, поэтому фактор-группа \mathbb{Z}/H существует для любой подгруппы $H \subseteq \mathbb{Z}$.

Теорема 2. Любая подгруппа H группы \mathbb{Z} имеет вид $H = m\mathbb{Z} = \{mk\}_{k \in \mathbb{Z}}$ для некоторого целого числа $m > 0$.

Доказательство. Для подгруппы $H \subseteq \mathbb{Z}$ рассмотрим наименьшее число $m > 0$, содержащееся в H . Разделим $h \in H, h > 0$ на m . Получим $h = am + b$, где $b < m$. В этом выражении и h и am принадлежат H , откуда и $b \in H$. Но m было предположено наименьшим из положительных целых чисел, содержащихся в H , откуда $b = 0$, т.е. $h = am$ и, следовательно, $H = m\mathbb{Z}$.

Фактор-группа $\mathbb{Z}_m = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ называется *группой вычетов по модулю m* . Эту группу вычетов можно рассмотреть как множество приведенных вычетов $M = \{0, 1, 2, \dots, m-1\}$ с не всегда обычным сложением: если для $a, b \in M$ сумма $a + b \geq m$, то $a + b = c$, где c есть остаток от деления $a + b$ на m . Например, $4 + 6 \equiv 3 \pmod{7}, 4 + 6 \equiv 2 \pmod{8}, 4 + 6 \equiv 1 \pmod{9}, 4 + 6 \equiv 0 \pmod{10}$.

Удобнее, однако, просто иметь дело со всеми целыми числами, только помнить, что два числа для нас считаются одинаковыми, если разность между ними делится на m . Например, $29 \equiv 5 \pmod{4}, 29 + 5 \equiv 2 \pmod{4}, 55 - 32 \equiv 3 \pmod{4}$. По поводу записей результатов сложения (вычитания), заметим, что в качестве ответа

естественно записывать наименьший положительный вычет. Например, хотя все равенства $55 - 32 \equiv 23 \pmod{4}$, $55 - 32 \equiv 19 \pmod{4}$, $55 - 32 \equiv 7 \pmod{4}$, $55 - 32 \equiv -1 \pmod{4}$, $55 - 32 \equiv -9 \pmod{4}$ верны, ответом разумно считать $55 - 32 \equiv 3 \pmod{4}$.

Группа вычетов \mathbb{Z}_m является циклической, с образующим элементом 1. Порядок этой группы равен m .

Теорема 3. Если $m = pq$, где p и q взаимно простые числа (т.е. не имеющие общих делителей), то $\mathbb{Z}_m = \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_q$.

Доказательство. Докажем предварительно лемму.

Лемма 1. Множество всевозможных комбинаций $H = \{ap + bq \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ образует подгруппу в \mathbb{Z} . Образующая $d > 0$ этой подгруппы является наибольшим общим делителем НОД (p, q) . В частности, если p и q взаимно просты, то найдутся целые числа $a, b \in \mathbb{Z}$, такие, что $ap + bq = 1$.

Доказательство леммы. В силу теоремы 2, подгруппа H имеет вид $H = d\mathbb{Z}$, $d > 0$. Проверим, что d является НОД (p, q) . Если положить $a = 1, b = 0$, то получаем, что $p \in H = d\mathbb{Z}$, что означает d делит p . Аналогично d делит q , т.е. d является общим делителем чисел p и q .

Число d принадлежит H , и потому оно имеет вид $d = \alpha p + \beta q$ для некоторых целых чисел $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$. Пусть, теперь, целое число z делит и p и q . Тогда z делит $d = \alpha p + \beta q$, что доказывает лемму.

Вернемся к теореме 3. В силу леммы 1 найдутся целые числа α и β , такие, что $\alpha p + \beta q = 1$. Тогда каждое целое число $x \in \mathbb{Z}$ запишется в виде

$$x = x\alpha p + x\beta q \quad (2)$$

и, в частности,

$$x \equiv x\alpha p \pmod{q} \text{ и } x \equiv x\beta q \pmod{p}. \quad (3)$$

Сопоставим, теперь, вычету $x \pmod{pq} \in \mathbb{Z}_{pq}$ пару вычетов $x \pmod{p} \in \mathbb{Z}_p$ и $x \pmod{q} \in \mathbb{Z}_q$. Это соответствие определяет гомоморфизм (проверить!) $\theta : \mathbb{Z}_{pq} \rightarrow \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_q$. Гомоморфизм является отображением "на". В самом деле, если s, t есть вычеты по \pmod{p} и \pmod{q} , соответственно, то рассмотрим целое число $k = s\beta q + t\alpha p$. В силу (3), для этого числа имеем $k \pmod{p} \equiv s\beta q \pmod{p} \equiv s \pmod{p}$ и, аналогично, $k \pmod{q} \equiv t\alpha p \pmod{q} \equiv t \pmod{q}$, что означает $\theta(k) = (s, t)$, т.е., в силу произвольности s и t , отображение θ действительно есть отображение "на".

Наконец, если для $x \in \mathbb{Z}_{pq}$ имеем $\theta(x) = 0$, то это означает, что x делится и на p и на q . Но в этом случае равенства (2) $x = x\alpha p + x\beta q$ достаточно для доказательства того, что x делится на pq , т.е. $x \equiv 0 \pmod{pq}$. Таким образом, ядро гомоморфизма θ равно 0 и этот гомоморфизм является изоморфизмом группы \mathbb{Z}_{pq} на группу $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_q$. Теорема доказана.

Лекция 3.

3.1 Значение матричных групп.

Матричные группы представляют собой наиболее важный класс групп по следующим соображениям.

1. Практически любая группа может рассматриваться как подгруппа некоторой матричной группы.
2. Имеется развитое математическое обеспечение исследования матриц.

3. Матричные группы и их фактор-группы (=однородные пространства) являются важным инструментом исследований в теоретической физике и аналитической механике.

4. *Линейным представлением* группы G называется гомоморфизм ρ этой группы в некоторую матричную группу. Элементы группы $g \in G$ можно тогда рассматривать как матрицы и подключать к исследованию строения группы разнообразные матричные инварианты. Важнейшим из таких инвариантов является след Tr матрицы — сумма диагональных элементов матрицы. Возникающая функция на группе G , $\chi(g) = \text{Tr}(\rho(g))$, называется характером представления ρ , а свойства характеров группы G представляют собой основной аппарат изучения строения групп.

3.2 Кольца и поля.

Определение. Кольцом называется множество R с двумя операциями, сложения и умножения элементов, удовлетворяющими ряду естественных аксиом.

I. Множество R есть абелева группа относительно сложения.

II. Множество R есть полугруппа относительно умножения в том смысле, что операция умножения в R ассоциативна: $(ab)c = a(bc)$.

III. Умножение дистрибутивно по отношению к сложению:

$$c(a + b) = ca + cb; \quad (a + b)c = ac + bc$$

для всех $a, b, c \in R$.

Существование 1 в кольце, вообще говоря, не предполагается. Если умножение коммутативно (т.е. $ab = ba$), то кольцо называется *коммутативным*. Коммутативное кольцо с единицей называется полем, если множество ненулевых элементов $R^* = R \setminus \{0\}$ образует группу.

Примеры колец: 1) $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$;

2) для любого кольца K формальные многочлены

$$P(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0, \text{ где } a_i \in K$$

образуют кольцо $K[X]$;

3) функции на любом множестве M с значениями в любом кольце K образуют кольцо относительно операций $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ и $(fg)(x) = f(x)g(x)$. Хорошие классы функций, обычно, образуют кольца, например, кольцо непрерывных функций, кольцо дифференцируемых функций, кольцо непрерывно дифференцируемых (гладких) функций и т.п.;

4) квадратные $n \times n$ матрицы $M(n, K)$ с элементами из любого кольца K образуют кольцо;

5) если A — абелева группа с произвольной дополнительной алгебраической структурой, то гомоморфизмы $f : A \rightarrow A$, сохраняющие эти дополнительные структуры, обычно образуют кольцо, обозначаемое $\text{Hom}(A, A)$ и называемое кольцом эндоморфизмов. Произведение $f : A \rightarrow A$ и $g : A \rightarrow A$ есть композиция (суперпозиция, сложная функция) $(g \circ f)(x) = g(f(x))$;

6) кольцо матриц $M(n, \mathbb{K})$, где \mathbb{K} — поле, можно отождествить с кольцом эндоморфизмов n -мерного арифметического пространства \mathbb{K}^n , если сопоставить линейному оператору $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$ его матрицу в стандартном базисе $\{e_i = (0, 0, \dots, 0, 1 \text{ (} i \text{ — е место)}, 0, \dots, 0)\}$;

7) вычеты \mathbb{Z}_m образуют кольцо относительно естественного умножения: для $x, y \in \mathbb{Z}_m$ произведение вычетов есть вычет $xy \bmod m$. Это определение не зависит

от выбора представителей в классе вычетов, т.к. если $x \equiv x' \pmod{m}, y \equiv y' \pmod{m}$, то из $x'y' = (x' - x + x)(y' - y + y) = xy + (x' - x)y + x(y' - y) + (x' - x)(y' - y)$ следует, что $x'y'$ отличается от xy на число, которое делится на m , и потому $x'y' \equiv xy \pmod{m}$.

3.3 Гомоморфизмы колец и идеалы.

В соответствии с общей философией алгебраических систем, *гомоморфизм колец* $f : R \rightarrow R'$ есть отображение, сохраняющее алгебраические операции: $f(x + y) = f(x) + f(y)$, $f(xy) = f(x)f(y)$ для всех $x, y \in R$. Ядро $\text{Ker } f = \{x \in R \mid f(x) = 0\}$ гомоморфизма колец обладает некоторым дополнительным свойством.

Определение. (левым) Идеалом кольца R называется подкольцо $I \subseteq R$, такое, что $aI \in I$ для любого $a \in R$.

Лемма 2. Ядро гомоморфизма колец является идеалом.

Доказательство. Если $I = \text{Ker } f$, x — произвольный элемент ядра, a — любой элемент из R , то $f(a \cdot x) = f(a) \cdot f(x) = a \cdot 0 = 0$, т.е. $ax \in I = \text{Ker } f$.

Также как для групп, верно и обратное.

Теорема 4. Если $I \subseteq R$ — идеал, то абелева фактор-группа R/I естественным образом превращается в кольцо, такое, что канонический гомоморфизм $\theta : R \rightarrow R/I$ на фактор-группу является гомоморфизмом колец, ядром которого является идеал I .

Множество $Ra = \{xa \mid x \in R\}$ является наиболее быстро получаемым (левым) идеалом. Идеалы такого рода называются *главными*.

Пример. Идеалы кольца \mathbb{Z} являются, в частности, подгруппами. Мы знаем, что подгруппы \mathbb{Z} имеют вид $m\mathbb{Z}$. Но последнее множество есть главный идеал, порожденный m . Следовательно, каждый идеал кольца \mathbb{Z} является главным.

Определение. Кольцо называется кольцом главных идеалов, если каждый его идеал — главный.

Таким образом, мы доказали, что кольцо \mathbb{Z} является кольцом главных идеалов.

Другим важным примером колец главных идеалов является кольцо многочленов над полем.

Теорема 5. Кольцо $K[X]$ многочленов над полем K является кольцом главных идеалов.

Доказательство. Пусть I — идеал кольца $K[X]$ и $P(X)$ многочлен минимальной степени, содержащийся в I . Используя правило деления уголком (алгоритм Евклида), любой элемент $A(X) \in I$ можно, после деления на $P(X)$ представить в виде $A(X) = B(X)P(X) + Q(X)$, где многочлен $Q(X)$ имеет степень, меньшую, чем степень $P(X)$. Так как I — идеал и $P(X) \in I$, то элемент $B(X)P(X)$ принадлежит I , откуда и элемент $Q(X)$ принадлежит I . Но степень многочлена $Q(X)$ меньше степени $P(X)$, откуда, по выбору $P(X)$, многочлен $Q(X)$ может быть только нулем. Итак, любой многочлен $A(X) \in I$ имеет вид $A(X) = B(X)P(X)$, т.е. идеал I является главным идеалом, порожденным $P(X)$. \square

Мы уже представляем себе, что есть фактор-кольцо $\mathbb{Z}_m = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ — кольцо вычетов по модулю m . Когда это кольцо является полем?

Теорема 6. Кольцо \mathbb{Z}_m является полем тогда, и только тогда, когда m простое число.

Доказательство. Пусть m — простое число и $x \in \mathbb{Z}_m$ не равно нулю, т.е. x не делится на m . Тогда x и m взаимно просты и из леммы 1 следует, что можно найти линейную комбинацию $ax + bm = 1$ с целыми $a, b \in \mathbb{Z}$. Но тогда $ax \equiv 1 \pmod{m}$, т.е. вычет $a \pmod{m}$ есть обратный элемент для вычета $x \pmod{m}$. Следовательно, \mathbb{Z}_m — поле.

Пусть теперь известно, что \mathbb{Z}_m — поле. Предположим противное, m не есть простое число. Это означает, что $m = pq$, где каждое из чисел $p \neq 1, q \neq 1$. В частности, p и q меньше m и потому не могут делиться на m . Переходя к вычетам по модулю m получим $pq \equiv 0 \pmod{m}$, что в поле может быть только в случае, когда один из сомножителей равен нулю, т.е. в нашем случае — один из сомножителей делится на m . Противоречие доказывает второе утверждение теоремы.

Задача. Поле \mathbb{F} имеет только два тривиальных идеала: $\{0\}$ и \mathbb{F} . Доказать, что коммутативное кольцо R с 1 является полем, если оно имеет только тривиальные идеалы.

Задача. Идеал I кольца R называется максимальным, если $I \neq R$ и не существует идеала $J \neq I, J \neq R$, содержащего I . Доказать, что фактор-кольцо R/I коммутативного кольца с 1 по максимальному идеалу I является полем.

Задача. Многочлен $P(X) \in k[X]$ над полем k называется неприводимым, если он не представляется в виде произведения многочленов меньшей степени. Доказать, что если $P(X)$ неприводимый многочлен, то фактор-кольцо $k[X]/P(X)$ есть поле.

Примеры.

1) Если $k = \mathbb{Q}$, то поля, полученные этой конструкцией, называются полями алгебраических чисел.

2) $\mathbb{C} = \mathbb{R}[X]/X^2 + 1$. Действительно, остаток от деления на многочлен $X^2 + 1$ имеет вид $bX + a$, где $a, b \in \mathbb{R}$. Но в фактор-кольце $\mathbb{R}[X]/X^2 + 1$ имеем $X^2 = -1$.

3.4 Модули над кольцами.

Определение. Модулем над кольцом R называется абелева группа M , в которой определено умножение на элементы кольца R , удовлетворяющее для всех $a, b \in M$, $\lambda, \mu \in R$ естественным свойствам:

- 1) (дистрибутивность умножения относительно сложения) $\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b$;
- 2) (дистрибутивность сложения относительно умножения) $(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a$;
- 3) (ассоциативность умножения на элементы кольца) $\lambda(\mu a) = (\lambda\mu)a$.

Для кольца R с единицей 1, R -модуль M называется *унитарным*, если умножение на 1 есть тождественное отображение, $1 \cdot a = a$ для всех $a \in M$.

Основной пример. В случае, когда кольцо $R = \mathbf{k}$ есть поле, \mathbf{k} -модули называются векторными (или линейными) пространствами над \mathbf{k} .

Модельный случай векторных пространств над \mathbb{R} изучался в 1-м семестре. Основное преимущество векторных пространств M над \mathbf{k} — существование базиса в векторных пространствах, т.е. такого семейства $\{e_i \in M\}_{i=1}^n$ (число n называется размерностью $\dim M$ векторного пространства M) элементов этого пространства, что любой элемент $a \in M$ представляется и притом единственным образом в виде линейной комбинации

$$a = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n e_n, \quad \lambda \in \mathbf{k}. \quad (4)$$

В частности, выбор базиса эквивалентен отождествлению линейного пространства M с арифметическим пространством \mathbf{k}^n , состоящего из всевозможных наборов $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ чисел из поля \mathbf{k} .

Как обычно, гомоморфизмом R -модулей $f: M \rightarrow M'$ называется гомоморфизм этих абелевых групп, $f(a + b) = f(a) + f(b)$, перестановочный с умножением на элементы кольца: $f(\lambda a) = \lambda f(a)$ для всех $a \in M$, $\lambda \in R$. В случае векторных пространств гомоморфизм модулей называется *линейным преобразованием*. Так как

для линейного преобразования имеем

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i f(e_i),$$

то линейное преобразование f полностью определяется тем, куда переходят элементы базиса e_i . Это означает, что матрица $A = (a_{ij})$, состоящая из координат образов базисных векторов,

$$f(e_i) = \sum_{j=1}^m a_{ji} e'_j \quad (5)$$

(здесь m — размерность $\dim M'$, $\{e'_j\}_{j=1}^m$ — базис в M') полностью определяет линейное преобразование f . Эта матрица называется *матрицей линейного преобразования f в базисах $\{e_i\}_{i=1}^n, \{e'_j\}_{j=1}^m$* .

Обратно, для данной $m \times n$ матрицы $A = (a_{ij})$ с элементами из поля \mathbf{k} по формуле (5) можно определить единственное линейное преобразование $f : M \rightarrow M'$, матрицей которого служит данная матрица. Если элементы $a \in$ отождествить с набором коэффициентов $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)^t$ в разложении (4), записанных в столбец, и поступить аналогично для элементов $f(a)$, то указанное линейное преобразование принимает следующий вид:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \dots \\ \dots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

Это означает, что выбор базиса в линейных пространствах M и M' позволяет отождествить множество линейных преобразований $\text{Hom}_{\mathbf{k}}(M, M')$ линейного пространства M в линейное пространство M' с множеством матриц размера $m \times n$ с элементами из поля \mathbf{k} . В частности, если $M = M'$, мы видим, что множество линейных преобразований пространства M в себя (линейных операторов) можно отождествить с множеством (даже кольцом) квадратных $n \times n$ -матриц $M(n, \mathbf{k})$ с элементами из поля \mathbf{k} .

В последнем случае, при переходе к другому базису, матрица линейного преобразования f принимает вид $T^{-1}AT$, т. е. является подобной исходной матрице этого преобразования. Возникает задача об оптимальном выборе базиса, в котором матрица линейного оператора f примет наиболее простой (канонический) вид (например, диагональный). Это — задача о приведении матрицы оператора к каноническому виду, которая решается в линейной алгебре.

Лекция 4.

4.1 Определенный интеграл.

В этом разделе мы напомним определение определенного интеграла и переформулируем его в виде, удобном для обобщений.

К понятию определенного интеграла обычно подводят через задачу о вычислении площади криволинейной трапеции.

Предположим на отрезке $[a, b]$ дана функция $f(x) \geq 0$. Рассмотрим криволинейную трапецию $T = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq f(x), x \in [a, b]\}$ и найдем способ вычисления площади этой криволинейной трапеции, исходя из того, что площадь прямоугольника равна произведению длин его сторон. Основная идея здесь — приближение криволинейной трапеции ступенчатой фигурой, состоящей из прямоугольников. Для этого выберем достаточно мелкое разбиение σ отрезка $[a, b]$ на необязательно равные отрезки с концами $\{a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b\}$, выберем точки $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ и составим сумму

$$I_\sigma(f) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i, \text{ где } \Delta x_i = x_i - x_{i-1} \text{ есть длина отрезка } I_i = [x_{i-1}, x_i] \quad (6)$$

Эта сумма называется *интегральной суммой функции f , связанной с разбиением σ области определения $[a, b]$ этой функции и выбором точек $\xi_i \in I_i$* .

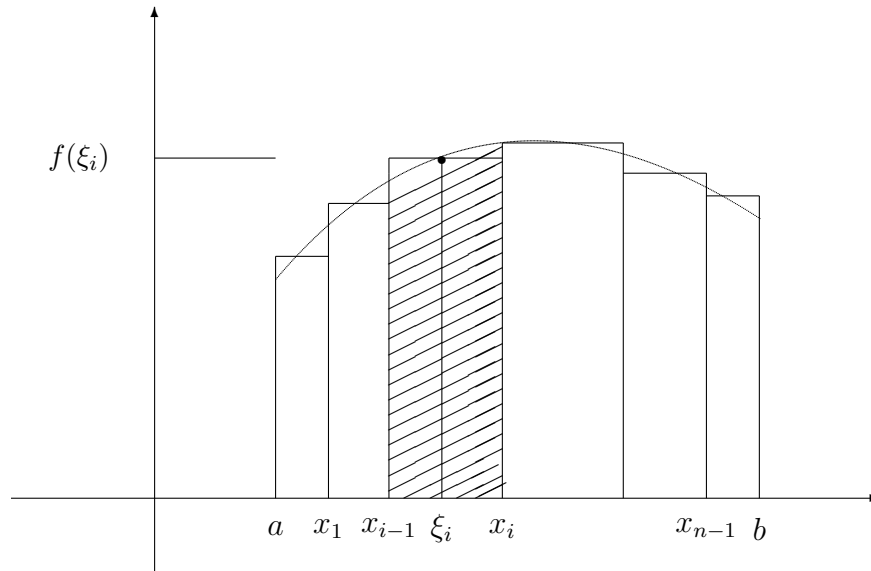


Рис. 1: Интегральная сумма

Рассматривая рис. 19, мы видим, что слагаемое $f(\xi_i) \Delta x_i$ интегральной суммы есть площадь прямоугольника, в основании которого лежит отрезок $[x_{i-1}, x_i]$ и высота которого равна $f(\xi_i)$. Таким образом, интегральная сумма (6) *геометрически есть площадь ступенчатой фигуры, приблизительно равной криволинейной трапеции*. Отсюда ясно, что, чтобы получить точное значение площади криволинейной трапеции надо рассматривать все более мелкие разбиения отрезка $[a, b]$ и пытаться найти предел, к которому стремятся соответствующие интегральные суммы. Точное определение — следующее. Для его формулировки выберем в качестве числа, определяющего мелкость разбиения σ , число $\text{diam } \sigma = \max_{1 \leq i \leq n} \{\Delta x_i\}$, которое будем называть

диаметром разбиения. Последовательность разбиений σ_k назовем *измельчающейся*, если $\lim_{k \rightarrow \infty} \text{diam } \sigma_k = 0$.

Определение. Если для любой измельчающейся последовательности разбиений $\{\sigma_k\}$ (т.е. когда $\text{diam } \sigma_k \rightarrow 0$) отрезка $[a, b]$ существует предел интегральных сумм $\lim_{k \rightarrow \infty} I_{\sigma_k}(f)$ и этот предел не зависит от выбора измельчающейся последовательности и выбора точек ξ_i в определении интегральных сумм, то функция $f(x)$ называется *интегрируемой на отрезке $[a, b]$* , а этот общий предел называется определенным интегралом функции f на $[a, b]$ и обозначается

$$\int_a^b f(x) dx.$$

Обозначим через $\mu(A)$ для каждого подмножества $A \subseteq [a, b]$ длину (если она существует) этого подмножества. Тогда определение интегральной суммы, связанной с разбиением $\sigma = \{I_i\}_{i=1}^n$ отрезка $[a, b]$ на отрезки $I_i = [x_{i-1}, x_i]$, можно переписать в виде

$$I_{\sigma}(f) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \mu(I_i), \quad (7)$$

а все остальное в определении определенного интеграла оставить без изменения. Тем самым мы приходим к общему определению интеграла по мере μ , которое будет сформулировано ниже.

4.2 Пространства с мерой и интеграл по мере.

Определение. Множество E называется пространством с мерой μ , если в нем выделено семейство подмножеств Σ , называемых *измеримыми подмножествами*, такое, что

- 1) пустое множество \emptyset и всё E измеримы;
- 2) если $A, B \in \Sigma$ (т.е. измеримы), то измеримы и все следующие подмножества: (а) объединение $A \cup B$; (б) пересечение $A \cap B$; (с) разность $A \setminus B = \{a \in A \mid a \notin B\}$;
- 3) для каждого измеримого подмножества $A \in \Sigma$ определено неотрицательное число $\mu(A) \geq 0$, называемое мерой этого подмножества, причем имеет место следующее свойство:

(*аддитивность меры*) если измеримые множества $A, B \in \Sigma$ не пересекаются, то $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$.

Модельным примером пространства с мерой для нас будет отрезок $E = [a, b]$, в котором измеримыми подмножествами называются подмножества отрезка, имеющие длину, а мерой измеримого подмножества называется длина этого подмножества.

Изобилие примеров пространств с мерой доставляет теория вероятностей, где вероятность события можно рассматривать как меру множества элементарных событий, при которых это событие происходит, т.е. меру множества элементарных событий, благоприятствующих данному событию). Например, основную характеристику случайной величины — ее распределение вероятностей можно рассматривать как меру на подмножествах прямой \mathbb{R} , если положить для $A \subseteq \mathbb{R}$ мера $\mu(A) = \text{вероятность } p\{\xi \in A\}$.

Определение. Измеримым разбиением пространства E с мерой называется конечное семейство $\sigma = \{A_i\}$ измеримых подмножеств, покрывающее E (т.е. $E = \bigcup_i A_i$), такое, что попарные пересечения $A_i \cap A_j$ имеют меру 0 (например, пусты). Интегральной суммой функции f на E , связанной с измеримым разбиением $\sigma = \{A_i\}_{i=1}^n$

и выбором точек $\xi_i \in A_i$ называется сумма вида

$$I_\sigma(f) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \mu(A_i). \quad (8)$$

Имея определение интегральной суммы, мы можем определить интеграл от функции как выше. Единственно, что еще нужно — это определение мелкости разбиения. Для этого предположим дополнительно, что E есть подмножество арифметического пространства \mathbb{R}^n (для наших приложений достаточно считать, что $n = 2$ или $n = 3$). В пространстве \mathbb{R}^n определено *расстояние* $\rho(x, y)$ между любой парой точек $x, y \in \mathbb{R}^n$ и потому можно определить *диаметр* $\text{diam } A$ *любого подмножества* $A \subseteq \mathbb{R}^n$ как минимум расстояний между любой парой точек $x, y \in A$, а затем определить *диаметр* $\text{diam } \sigma$ *разбиения* $\sigma = \{A_i\}$ как максимум диаметров $\text{diam } A_i$ элементов этого разбиения. После этого определение интеграла звучит дословно также, как в случае отрезка.

Определение. Пусть дано пространство (E, Σ, μ) с мерой. Если для любой измельчающейся последовательности измеримых разбиений $\{\sigma_k\}$ (т.е. когда $\text{diam } \sigma_k \rightarrow 0$) множества E существует предел интегральных сумм $\lim_{k \rightarrow \infty} I_{\sigma_k}(f)$ и этот предел не зависит от выбора измельчающейся последовательности и выбора точек ξ_i в определении интегральных сумм, то функция $f(x)$ называется *интегрируемой на множестве E* , а этот общий предел называется интегралом функции f на E по мере μ и обозначается

$$\int_E f d\mu.$$

4.3 Свойства интегралов по мере.

I. *Линейность интеграла:* $\int_E (af + bg) d\mu = a \int_E f d\mu + b \int_E g d\mu$ для любых интегрируемых на E функций f и g , и чисел $a, b \in \mathbb{R}$.

II. *Аддитивность интеграла:* если $E = A \cup B$, где A и B измеримы и $\mu(A \cap B) = 0$, то $\int_E f d\mu = \int_A f d\mu + \int_B f d\mu$.

III. *Монотонность интеграла:* если $f(x) \leq g(x)$ для всех $x \in E$, то $\int_E f d\mu \leq \int_E g d\mu$.

IV. *Нормировка:* $\int_E 1 d\mu = \mu(E)$.

Все эти свойства проверяются на уровне интегральных сумм, после чего требуемое свойство интеграла получается предельным переходом, когда диаметр разбиения стремится к 0. Докажем, например, аддитивность интеграла.

Пусть $\sigma = \{E_i\}$ — измеримое разбиение множества E . Рассматривая пересечения $E_i \cap A$, $E_j \cap B$, можно считать, что разбиение σ распадается на два семейства $\sigma_1 = \{A_i\}_{i=1}^n$ и $\sigma_2 = \{B_j\}_{j=1}^m$, где $A_i \subseteq A$, $B_j \subseteq B$. Тогда интегральная сумма $I_\sigma(f)$ распадается на две части, $I_\sigma(f) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \mu(A_i) + \sum_{j=1}^m f(\eta_j) \mu(B_j)$, т.е.

$$I_\sigma(f) = I_{\sigma_1}(f) + I_{\sigma_2}(f),$$

где σ_1 есть измеримое разбиение множества A , а σ_2 есть измеримое разбиение множества B . Переходя в этом равенстве к пределу, когда $\text{diam } \sigma \rightarrow 0$, получаем

$$\int_E f d\mu = \int_A f d\mu + \int_B f d\mu.$$

4.4 Примеры пространств с мерой и интегралов по мере.

I. В модельном примере отрезка $E = [a, b]$, когда измеримые подмножества $A \subseteq E$ — это подмножества, имеющие длину, а мера $\mu(A)$ есть длина A , интеграл по этой мере есть обычный определенный интеграл.

II. Множество $E \subseteq \mathbb{R}^2$ есть область в $\mathbb{R}^2 = \{(x, y)\}$, ограниченная кусочно-гладкой кривой. Измеримые подмножества — это подмножества $A \subseteq E$, ограниченные кусочно-гладкими кривыми. Мера $\mu(A)$ есть площадь A . Интеграл по этой мере называется двойным интегралом и обозначается $\iint_E f(x, y) dx dy$. Обозначение для этой меры $d\mu = dx dy$ подсказывает, что мера происходит из способа вычисления площади прямоугольника как произведения длин сторон. Это обозначение облегчает также восприятие формулы замены переменных в двойном интеграле.

III. Множество $E \subseteq \mathbb{R}^3$ есть тело в $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z)\}$, ограниченное кусочно-гладкой поверхностью. Измеримые подмножества — это подмножества $A \subseteq E$, ограниченные кусочно-гладкими поверхностями; мера μA есть объем A . Интеграл по этой мере называется *тройным интегралом* и обозначается $\iiint_E f(x, y, z) dx dy dz$. Обозначение для этой меры $d\mu = dx dy dz$ подсказывает, что мера происходит из способа вычисления объема прямого параллелепипеда как произведения длин сторон. Это обозначение облегчает также восприятие формулы замены переменных в тройном интеграле.

IV. Множество $L \subseteq \mathbb{R}^3$ есть кусочно-гладкая кривая в $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z)\}$. Измеримые подмножества — это подмножества $A \subseteq L$, имеющие длину; мера μA есть длина A . Интеграл по этой мере называется *криволинейным интегралом (1-го рода)* и обозначается $\int_L f(x, y, z) ds$.

V. Множество $P \subseteq \mathbb{R}^3$ есть кусочно-гладкая поверхность в $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z)\}$. Измеримые подмножества — это подмножества $A \subseteq P$, имеющие площадь; мера μA есть площадь A . Интеграл по этой мере называется *поверхностным интегралом (1-го рода)* и обозначается $\iint_L f(x, y, z) d\sigma$.

Лекция 5.

Существование и вычисление интегралов по мере.

Смысл нижеследующей теоремы: интеграл по мере существует для любой встречающейся на практике функции.

Теорема. Функция f на пространстве с мерой $E \subseteq \mathbb{R}^n$ называется кусочно-непрерывной на E , если существует конечное измеримое покрытие $E = \bigcup E_i$ множества E , на каждом элементе E_i которого функция является непрерывной. Любая ограниченная кусочно-непрерывная функция на пространствах с мерой I–V является интегрируемой.

Таким образом, для применения на практике, осталось указать только методы вычисления интегралов в примерах I–V.

[I.] Вычисление определенных интегралов на отрезке $[a, b]$ изучалось в 2-м семестре и основывалось на следующей формуле Ньютона–Лейбница:

если $f(x)$ — непрерывная функция на отрезке $[a, b]$ и $F(x)$ — произвольная первообразная функции f на этом отрезке (т.е. $F'(x) = f(x)$ для всех $x \in [a, b]$), то

$$\boxed{\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b} \quad (9)$$

II. Вычисление двойного интеграла по прямоугольнику $E = [a, b] \times [c, d]$ сводится к повторному интегралу:

$$\iint_{[a,b] \times [c,d]} f(x, y) dx dy = \int_a^b \left\{ \int_c^d f(x, y) dy \right\} dx \quad (10)$$

Эта формула предельным переходом получается из следующего выражения для интегральной суммы для прямоугольника, связанной с его разбиением на маленькие прямоугольники $[x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$:

$$\sum_{i,j} f(x_i, y_j) \Delta x_i \Delta y_j = \sum_i \left\{ \sum_j f(x_i, y_j) \Delta y_j \right\} \Delta x_i$$

III. Вычисление тройного интеграла по прямому параллелепипеду $E = [a, b] \times [c, d] \times [p, q]$ сводится к повторному интегралу:

$$\iiint_{[a,b] \times [c,d] \times [p,q]} f(x, y) dx dy = \int_a^b \left\{ \int_c^d \left\{ \int_p^q f(x, y, z) dz \right\} dy \right\} dx \quad (11)$$

IV. Вычисление криволинейного интеграла по кривой L надо начать с вычисления интеграла от 1, т.е. с нахождения формулы для длины дуги кривой.

В дальнейшем мы будем предполагать, что функции $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in [\alpha, \beta]$, задающие параметризацию кривой L , являются непрерывно дифференцируемыми на отрезке $[\alpha, \beta]$. Кривую с этими свойствами будем называть *гладкой кривой*. Точку на кривой, соответствующую значению параметра t будем обозначать $M(t)$. Таким образом, $\vec{r}(t)$ есть радиус-вектор точки $M(t)$, $\vec{r}(t) = \overrightarrow{OM(t)}$, а вектор $\vec{r}'(t)$ и точка $M(t)$ имеют одинаковые координаты $(x(t), y(t), z(t))$.

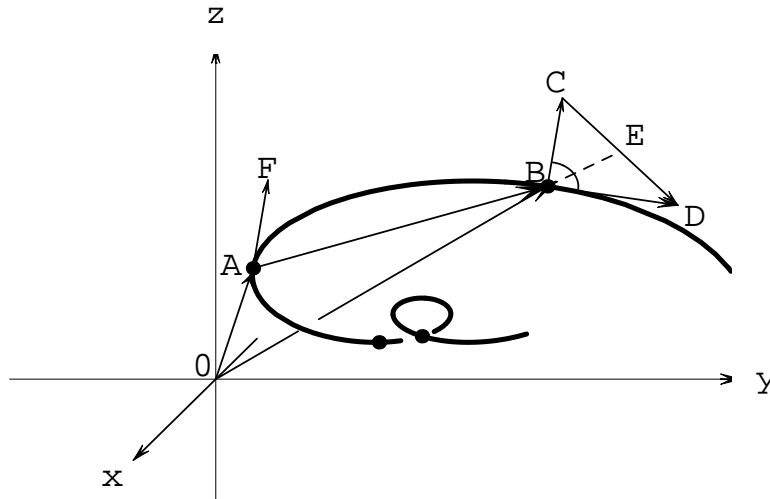


Рис. 2: Длина дуги приближенно есть длина хорды .

Определение. Длиной кривой называется предел длин ломаных линий, вершины которых лежат на этой кривой, когда длина наибольшего из звеньев ломаной линии стремится к нулю.

Интуитивно ясно (и это можно доказать формально аккуратно), что гладкая кривая имеет длину в смысле данного определения, т.е. указанный предел длин ломаных линий действительно существует.

Таким образом, чтобы получить приближенное значение длины гладкой кривой нужно взять некоторое число точек на кривой и соединить последовательно эти точки отрезками. Сумма длин полученных отрезков даст нам приближенное значение длины кривой. Чем больше (достаточно равномерно раскиданных) точек кривой мы возьмем, тем меньше сумма длин звеньев полученной ломаной будет отличаться от длины кривой. В частности,

длина маленькой дуги кривой в первом приближении равна длине хорды, стягивающей эту дугу.

Например, на рис. 2 длина $\Delta s = |\widehat{AB}|$ дуги \widehat{AB} кривой с концами A и B будет приблизительно равна длине отрезка AB . Если $\vec{r}(t)$ есть параметризация данной кривой, и $\vec{OA} = \vec{r}(t)$ (т.е. точка A соответствует значению параметра t), а $\vec{OB} = \vec{r}(t + \Delta t)$ (т.е. точка B соответствует значению параметра $t + \Delta t$), то длина вектора $|\vec{AB}| = |\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)|$ есть длина отрезка AB , т.е.

длина Δs дуги $\widehat{AB} \approx$ есть длина вектора $\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$. Считая, что длина дуги отсчитывается в направлении роста параметра, разделим обе части этого приближенного равенства на $\Delta t > 0$. Тогда получим

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} \approx \left| \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} \right|,$$

откуда, переходя к пределу когда $\Delta t \rightarrow 0$, получим точное равенство

$$\frac{ds}{dt} = \left| \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \right|. \quad (12)$$

Известно, что вектор скорости $\frac{d\vec{r}}{dt} = (x'(t), y'(t), z'(t))$, и если вспомнить, что длина вектора $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ вычисляется по его декартовым координатам $\vec{v} = (a, b, c)$ по формуле $|\vec{v}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$, то в силу (12) имеем следующую формулу для вычисления производной длины дуги по параметру

$$\boxed{\frac{ds}{dt} = \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right| = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}}. \quad (13)$$

и следующую формулу для приближенного вычисления дает приближенное равенство для длины дуги Δs_i участка кривой между точками $M(t_i)$ и $M(t_i + \Delta t_i)$ кривой:

$$\frac{\Delta s_i}{\Delta t_i} \approx \sqrt{x'^2(t_i) + y'^2(t_i) + z'^2(t_i)} \text{ или } \Delta s_i \approx \sqrt{x'^2(t_i) + y'^2(t_i) + z'^2(t_i)} \Delta t_i. \quad (14)$$

Полученное выражение для производной длины дуги (13), после интегрирования, приводит к формуле для самой длины дуги:

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} dt \quad (15)$$

С другой стороны, формула (14) уже легко приводит к формуле для вычисления криволинейного интеграла. Именно пусть $\sigma = \{\alpha = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = \beta\}$ —

достаточно мелкое разбиение области параметризации $[\alpha, \beta]$. В качестве точки $\gamma_i \in [t_{i-1}, t_i]$, участвующей в определении интегральной суммы, возьмем, для простоты, $\gamma_i = t_i$ и рассмотрим соответствующие точки $\xi_i = M(t_i)$ на кривой L . Разбиение σ отрезка $[\alpha, \beta]$ на отрезки $I_i = [t_{i-1}, t_i]$ порождает разбиение σ' кривой L на дуги $L_i = \widehat{M(t_{i-1}), M(t_i)}$, где L_i есть дуга кривой L , заключенная между точками $M(t_{i-1})$ и $M(t_i)$. Для интегральных сумм, связанных с этими разбиениями, имеем

$$\begin{aligned} I_{\sigma'}(f(x, y, z)) &= \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \mu(L_i) \approx \sum_{i=1}^n f(M(t_i)) \sqrt{x'^2(t_i) + y'^2(t_i) + z'^2(t_i)} \Delta t_i = \\ &= I_{\sigma}(f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}), \end{aligned}$$

откуда переходя к пределу, когда $\text{diam } \sigma \rightarrow 0$, получаем точное равенство

$$\boxed{\int_L f(x, y, z) ds = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} dt} \quad (16)$$

Другое полезное следствие равенства (12) получается, когда в качестве параметра t , определяющего положение точки $M(t)$ на кривой, берется длина s отрезка кривой от ее начала $M(\alpha)$ до точки $M(t)$. Возникающая таким образом параметризация $\vec{r}(s) = \overrightarrow{OM(t)}$ называется *натуральной*. Если взять в равенстве (12) натуральный параметр $t = s$, то $\frac{ds}{dt} = 1$, откуда

$$\boxed{\left| \frac{d\vec{r}}{ds} \right| = 1} \quad (17)$$

— длина производной радиуса-вектора точки кривой по длине дуги равна 1.

Следствие. Вектор $\vec{\tau} = \frac{d\vec{r}}{ds}$ является единичным касательным вектором к кривой, направление которого соответствует возрастанию параметра¹.

V. Вычисление поверхностного интеграла по поверхности P надо начать с вычисления интеграла от 1, т.е. с нахождения формулы для площади поверхности. Рассмотрим сначала наиболее простой случай.

A. Площадь наклонной плоской области: площадь области Δ , лежащей в плоскости, не перпендикулярной плоскости xOy , равна площади ее проекции D на плоскость xOy , деленной на $\cos \theta$, где θ — угол между плоскостью, в которой лежит область Δ , и плоскостью xOy :

$$\boxed{\mu(\Delta) = \frac{\mu(D)}{\cos \theta}} \quad (18)$$

Пусть сначала область Δ — прямоугольник с сторонами, параллельными линии пересечения и перпендикулярными этой линии, как на рис. . Имеем $|A_1B_1| = |AB| \cos \theta$, $|B_1C_1| = |BC|$, откуда $\mu(D) = |A_1B_1| \cdot |B_1C_1| = |AB| \cdot |BC| \cos \theta = \mu(\Delta) \cos \theta$, что доказывает формулу (18) в этом простейшем случае.

Произвольную наклонную плоскую область Δ можно с любой степенью точности представить в виде объединения $\tilde{\Delta}$ маленьких прямоугольников с сторонами, параллельными линии пересечения или перпендикулярными этой линии. Обозначим

¹Греческая буква τ читается "тау"

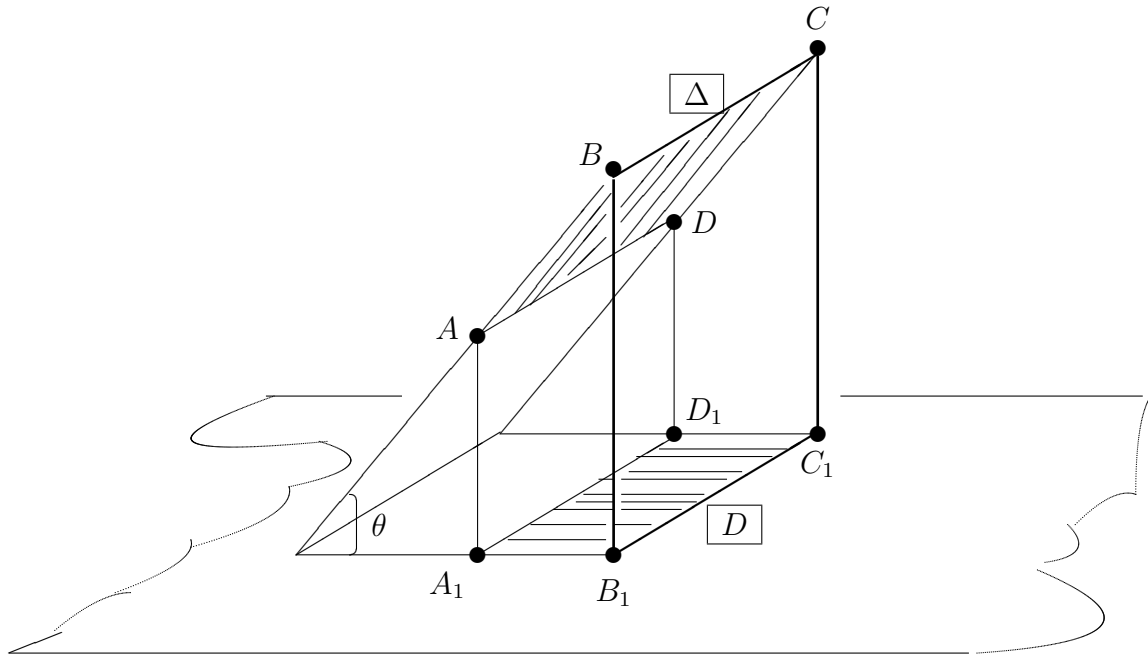


Рис. 3: Площадь наклонной плоской области.

через D и \tilde{D} проекции этих областей на плоскость xOy . Из только что доказанного, мы можем заключить, что $\mu(\tilde{\Delta}) = \frac{\mu(\tilde{D})}{\cos \theta}$. Поэтому

$$\mu(\Delta) \underset{\text{сколь угодно точно}}{\approx} \mu(\tilde{\Delta}) = \frac{\mu(\tilde{D})}{\cos \theta} \underset{\text{сколь угодно точно}}{\approx} \frac{\mu(D)}{\cos \theta},$$

что возможно только в случае равенства $\mu(\Delta) = \frac{\mu(D)}{\cos \theta}$.

В. Интеграл по поверхности, имеющей вид графика гладкой функции.

Для простоты рассмотрим случай, когда поверхность P есть график непрерывно дифференцируемой (=гладкой) функции $z = \varphi(x, y)$, область определения которой есть прямоугольник $D = [a, b] \times [c, d]$.

Для того, чтобы дальше легче было бы следить за рассуждениями, рассмотрим рисунок.

На этом рисунке изображен фрагмент разбиения σ прямоугольника $D = [a, b] \times [c, d]$ на маленькие прямоугольники $D_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$, . Для краткости обозначим $\xi_{ij} = (x_i, y_j)$ и $\tilde{\xi}_{ij} = (x_i, y_j, \varphi(x_i, y_j))$. На рис. изображены точки $A = \tilde{\xi}_{ij}, B = \xi_{ij}, C = \xi_{(i-1)j}, E = \xi_{i(j-1)}$.

Разбиению σ соответствует разбиение $\tilde{\sigma}$ поверхности P на криволинейные четырехугольники Δ_{ij} — части поверхности P , лежащие над прямоугольниками D_{ij} . Площадь криволинейного четырехугольника Δ_{ij} в первом приближении равна площади участка касательной плоскости к поверхности P в точке A , также проектирующегося на прямоугольник D_{ij} . Поэтому, в силу доказанной формулы для площади плоской наклонной области, имеем

$$\mu(\Delta_{ij}) \approx \frac{\mu(D_{ij})}{\cos \theta_{ij}},$$

где θ_{ij} — угол между касательной плоскостью к поверхности P в точке $\tilde{\xi}_{ij}$ и плоскостью xOy . Соответственно, интегральная сумма

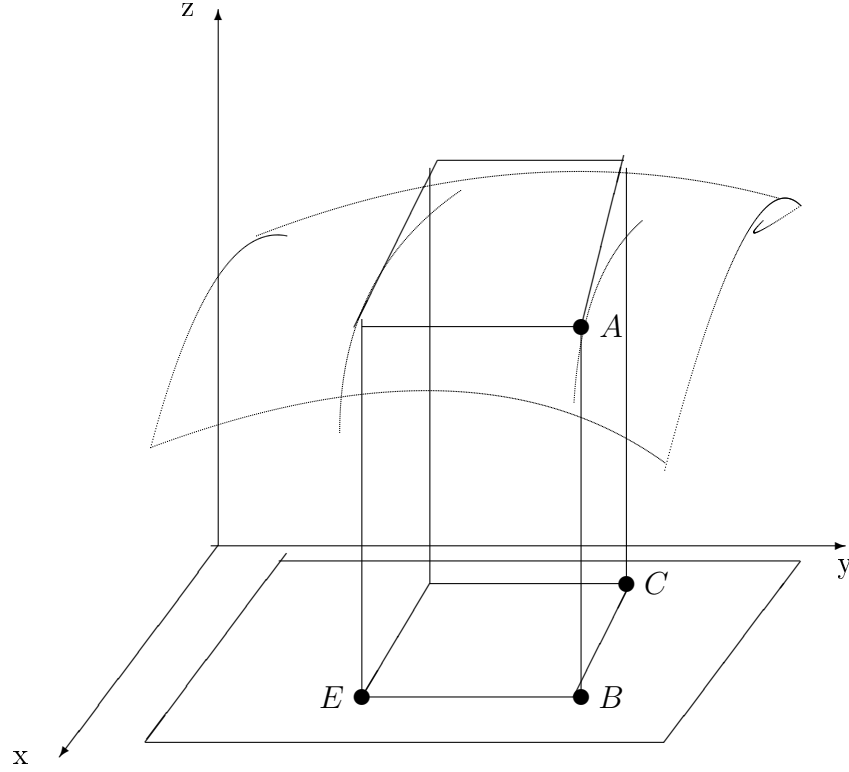


Рис. 4: Касательная плоскость.

$$I_{\bar{\sigma}}(f) = \sum_{i,j} f(\xi_{ij}) \mu(\Delta_{ij}) \approx \sum_{i,j} f(\xi_{ij}) \frac{D_{ij}}{\cos \theta_{ij}} \quad (19)$$

Отсюда следует, что для интегральной суммы $I_{\bar{\sigma}}(f)$ функции f на поверхности P имеем приближенное равенство

$$I_{\bar{\sigma}}(f) = \sum_{i,j} f(\xi'_{ij}) \mu(\Delta_{ij}) \approx \sum_{i,j} f(\tilde{\xi}_{ij}) \frac{\mu(D_{ij})}{\cos \theta(\xi_{ij})} = I_{\sigma} \left(\frac{f(x, y, \varphi(x, y))}{\cos \theta} \right).$$

Переходя в этом приближенном равенстве к пределу, когда $\text{diam } \sigma \rightarrow 0$, получаем точное равенство

$$\iint_P f(x, y, z) dS = \iint_D f(x, y, \varphi(x, y)) \frac{dx dy}{\cos \theta}. \quad (20)$$

Для практического использования этой формулы осталось найти явное выражение для $\cos \theta(\xi_{ij})$. Для этого надо найти нормаль к графику функции $z = \varphi(x, y)$ в точке $\tilde{\xi}_{ij} = (x_i, y_j, f(x_i, y_j))$. В свою очередь, для этого достаточно в точке ξ_{ij} найти пару линейно независимых касательных векторов $\vec{\tau}_1, \vec{\tau}_2$ и рассмотреть их векторное произведение $\vec{n} = [\vec{\tau}_1, \vec{\tau}_2]$. В самом деле, векторное произведение $[\vec{\tau}_1, \vec{\tau}_2]$, по определению, есть вектор, перпендикулярный плоскости, натянутой на векторы τ_1 и τ_2 , т.е. в нашем случае — перпендикулярный касательной плоскости.

Рассмотрим кривые $l_1(t) = (x_i + t, y_j, \varphi(x_i + t, y_j))$ и $l_2(t) = (x_i, y_j + t, \varphi(x_i, y_j + t))$ на графике функции $z = f(x, y)$. Их касательные векторы есть, соответственно, $\tau_1 = (1, 0, \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_i, y_j))$ и $\tau_2 = (0, 1, \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_i, y_j))$. Напомним, что векторное произведение векторов \vec{a} и \vec{b} вычисляется по декартовым координатам $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} =$

(b_1, b_2, b_3) этих векторов по формуле

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix},$$

где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ — единичные направляющие векторы осей Ox, Oy, Oz . Поэтому в качестве нормали \vec{n} можно взять векторное произведение

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ 0 & 1 & \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{vmatrix}.$$

Раскладывая этот определитель по первой строке, получаем

$$\vec{n} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j} + \vec{k}. \quad (21)$$

Длина этого вектора нормали равна $|\vec{n}| = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2}$.

Отсюда, по формуле $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$ для вычисления угла между век-

торами через скалярное произведение этих векторов, имеем $\cos \theta_{ij} = \frac{(\vec{n}, \vec{k})}{|\vec{n}| |\vec{k}|} =$

$\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2}}$. Все частные производные в этих формулах вычисляются в точке $\xi_{ij} = (x_i, y_j)$.

Подставляя это выражение для $\cos \theta_{ij}$ в (19) получаем

$I_{\vec{\sigma}}(f) \approx \sum_{i,j} f(x_i, y_j, \varphi(x_i, y_j)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2}(x_i, y_j) =$
 $= I_{\sigma}(f(x, y, \varphi(x, y))) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2}$. Наконец, переходя в этом приближенном равенстве к пределу, когда диаметр разбиения $\text{diam } \sigma \rightarrow 0$, получаем

$$\iint_P f(x, y, z) dS = \iint_D f(x, y, \varphi(x, y)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2} dx dy. \quad (22)$$

— формула для вычисления интеграла по поверхности P , являющейся графиком гладкой функции $z = \varphi(x, y)$ с областью определения $D \subseteq \mathbb{R}^2$.

Следствие. Формула для вычисления площади поверхности P , являющейся графиком гладкой функции $z = \varphi(x, y)$:

$$\mu(P) = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2} dx dy. \quad (23)$$

Лекция 5.

Применения интегралов по мере.

5.1 Восстановление значения аддитивной величины по ее плотности распределения.

Определение. Величина (функция множеств) A называется аддитивной, если $A(U \cup V) = A(U) + A(V)$ для любых непересекающихся измеримых подмножеств.

Определение. Плотностью распределения величины (функции множеств) A на пространстве с мерой (E, Σ, μ) в точке x называется

$$\rho_A(x) = \lim_{\substack{\text{diam } D \rightarrow 0 \\ x \in D}} \frac{A(D)}{\mu(D)}. \quad (24)$$

Часто используемым свойством плотности является следующее:

$$A(D) \approx \rho(\xi)\mu(D) \quad \text{для любой точки } \xi \in D. \quad (25)$$

Теорема. Значение аддитивной величины A на измеримом подмножестве $D \subseteq E$ есть интеграл от плотности $\rho(x)$ распределения этой величины на E :

$$A(D) = \int_D \rho(x) d\mu. \quad (26)$$

Действительно, для любого измеримого разбиения $\sigma = \{D_i\}_{i=1}^n$ множества D на непересекающиеся подмножества и любых точек $\xi_i \in D_i$, в силу аддитивности величины A и в силу (25), будем иметь:

$$A(D) = \sum_{i=1}^n A(D_i) \approx \sum_{i=1}^n \rho(\xi_i)\mu(D_i) = I_\sigma(\rho).$$

Переходя к пределу в этом приближенном равенстве, когда $\text{diam } \sigma \rightarrow 0$, получаем утверждение теоремы.

(а) Масса стержня, оболочки, тела есть интеграл, соответственно, от линейной плотности стержня, поверхностной плотности оболочки, объемной плотности тела.

(б) Полный заряд стержня, оболочки, тела есть интеграл, соответственно, от линейной плотности распределения зарядов в стержне, поверхностной плотности распределения зарядов в оболочке, объемной плотности распределения зарядов в теле.

5.2 Распространение определений в механике и теории вероятностей с дискретного случая на непрерывный случай.

А. Механика.

Стержень, оболочка, тело аппроксимируется конечным числом материальных точек $\{(\xi, m_i)\}_{i=1}^n$. Если изучаемое понятие известно для конечной системы материальных точек, то его определение распространяется на стержень, оболочку, тело предельным переходом, когда точность аппроксимации неограниченно увеличивается.

Пример. Момент инерции оболочки относительно точки $T = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

Рассмотрим оболочку как поверхность $P \subseteq \mathbb{R}^3$ с плотностью распределения масс $\rho(x, y, z)$, возьмем достаточно мелкое разбиение $\sigma = \{\Delta_i\}$ поверхности P на измеримые (=имеющие площадь) подмножества Δ_i и выберем точки $\xi_i \in \Delta_i$. Если

разбиение σ достаточно мелкое, то данная оболочка, как материальное тело, хорошо аппроксимируется системой материальных точек $\{(\xi_i, m(\Delta_i))\}$. Момент инерции системы материальных точек относительно точки T равен

$$\sum_{i=1}^n d^2(\xi, T) m(\Delta_i) \approx \sum_{i=1}^n d^2(\xi_i, T) \rho(\xi_i) \mu(\Delta_i)$$

в силу основного свойства (25) плотности; здесь $d(A, B)$ — расстояние между точками $A, B \in \mathbb{R}^3$. Таким образом, момент инерции оболочки $I_T(P)$ приблизительно равен интегральной сумме $I_\sigma(d^2(\xi, T) \rho(\xi))$, что при переходе к пределу, когда $\text{diam } \sigma \rightarrow 0$, приводит к точной формуле

$$I_T(P) = \iint_P d^2(\xi, T) \rho(\xi) dS.$$

Точно также выводятся формулы типа

$$\int_L \vec{r}(\xi) \rho(\xi) ds$$

— статический момент стержня, имеющего форму кривой $L \subseteq \mathbb{R}$ и плотность $\rho(\xi)$ в точке $\xi \in L$ (здесь $\vec{r}(\xi)$ — радиус-вектор точки ξ) и

$$\iiint_V d^2(\xi, L) \rho(\xi) dx dy dz$$

— момент инерции относительно оси L тела $V \subseteq \mathbb{R}^3$ с плотностью $\rho(\xi)$ в точке $\xi \in V$; здесь $d(\xi, L)$ — расстояние от точки ξ до оси L .

В. Теория вероятностей.

Вся информация о свойствах случайной величины ξ сосредоточена в функции ее распределения $\Phi(x)$ = вероятность $p\{\xi < x\}$ или, что более удобно, в ее плотности $p(x) = \Phi'(x)$. Поэтому непрерывную случайную величину ξ можно аппроксимировать дискретной случайной величиной η_σ в соответствии со следующей схемой.

Возьмем достаточно большой промежуток $[-M, M]$, достаточно мелкое разбиение $\sigma = \{x_0 = -M < x_1 < x_2 < \dots < x_n = M\}$ этого промежутка и выберем точки $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$. Определим дискретную случайную величину η_σ , считая, что она принимает значение $\xi_0 = -M$ с вероятностью $\pi(\xi_0) = \Phi(-M)$, значение ξ_i — с вероятностью $\pi(\xi_i) = \Phi(x_i) - \Phi(x_{i-1})$, $1 \leq i \leq n$, и значение $\xi_{n+1} = M$ — с вероятностью $\pi(\xi_{n+1}) = 1 - \Phi(M)$.

Применение. Математическое ожидание (=среднее значение) дискретной случайной величины η_σ равно

$$M(\eta_\sigma) = \sum_{i=1}^{n+1} \xi_i \pi(\xi_i) = \sum_{i=1}^{n+1} \xi_i \mu((x_{i-1}, x_i]) = I_\sigma(\xi).$$

Предельный переход, когда $\text{diam } \sigma \rightarrow 0$, а $M \rightarrow \infty$ приводит к следующей формуле для математического ожидания непрерывной случайной величины:

$$M(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \xi d\Phi = \int_{-\infty}^{+\infty} x p(x) dx.$$

Отметим, что интегральные суммы $I_\sigma(\xi)$ имеют структуру, отличную от стандартной для нас:

$$I_\sigma(\xi) = \sum_{i=0}^{n+1} \xi_i \mu(\{x \mid x_{i-1} < x \leq x_i\}),$$

т.е. исходной здесь является идея разбиения на непересекающиеся подмножества не области определения функции, а области значений функции. Последовательная реализация этого подхода, принадлежащая Лебегу, приводит к более общему понятию интеграла, чем схема определения интеграла по мере, данная выше; этот интеграл по мере называется интегралом Лебега и является основным инструментом в чистой математике в силу, как правило, выполняющегося свойства предельного перехода под знаком интеграла:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\mu = \int_E \lim_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu.$$

Для интеграла, рассмотренного выше, называемого интегралом Римана, свойство предельного перехода под знаком интеграла выполняется, вообще говоря, только для так называемой *равномерной сходимости* последовательности функций. Так как в приложениях, как правило, инженерам не приходится заниматься предельными переходами, то для их работы достаточно знакомства с более простым понятием интеграла Римана.

Лекция 6.

6.1 Криволинейный интеграл 2-го рода.

Криволинейный интеграл 2-го рода и поверхностный интеграл 2-го рода являются интегралами от функций специального вида. Они имеют важные физические приложения.

Задача. Нахождение работы при движении в переменном поле сил.

Предположим точка движется вдоль кривой $L \subseteq \mathbb{R}^3$ в переменном поле сил. Последнее означает, что в каждой точке $M \in L$ действует сила $\vec{F}(M)$, величина и направление которой меняется от точки к точке. Как найти работу, совершаемую при этом движении?

Разобьем кривую на куски $\sigma = \{L_i\}_{i=1}^n$, достаточно мелкие для того, чтобы считать, что поле сил вдоль L_i в первом приближении постоянно и равно $\vec{F}(\xi_i)$, где $\xi_i \in L_i$ — некоторая (любая) точка этого участка L_i кривой. Реальную работу по перемещению вдоль кривой совершает только проекция $(\vec{F}, \vec{\tau})\vec{\tau}$ силы \vec{F} на касательную к кривой в соответствующей точке; здесь $\vec{\tau}$ — единичный касательный вектор к кривой, направленный в сторону движения, а (\vec{a}, \vec{b}) есть скалярное произведение векторов \vec{a} и \vec{b} . Поэтому, по принципу "работа есть величина силы, умноженная на путь", вдоль участка L_i кривой работа поля сил приблизительно равна $(\vec{F}, \vec{\tau})(\xi_i)\mu(L_i)$, где $\mu(L_i)$ — длина L_i . Соответственно, работа поля сил при движении вдоль кривой L приблизительно равна $\sum_{i=1}^n (\vec{F}, \vec{\tau})(\xi_i) = I_\sigma(\vec{F}, \tau)$. Переходя в этом рассуждении к пределу, когда $\text{diam } \sigma \rightarrow 0$, получаем точное равенство:

$$\text{Работа поля сил } \vec{F} \text{ вдоль кривой } L = \int_L (\vec{F}, \vec{\tau}) ds.$$

Определение. Криволинейным интегралом 2-го рода называется интеграл вида

$$\int_L (\vec{F}, \vec{\tau}) ds,$$

где \vec{F} векторное поле вдоль кривой $L \subseteq \mathbb{R}^3$, а $\vec{\tau}$ есть поле единичных касательных векторов вдоль кривой L , определенное направлением движения (*ориентацией*) на этой кривой.

Мы видим, что если \vec{F} интерпретировать как поле сил, то криволинейный интеграл $\int_L (\vec{F}, \vec{\tau})$ есть работа этого поля сил при движении вдоль кривой L в направлении $\vec{\tau}$. Соответственно, для 1) поля электрической напряженности \vec{E} , 2) поля скоростей \vec{v} течения жидкости, 3) поля скоростей \vec{V} течения газа, криволинейный интеграл 2-го рода выражает 1) э.д.с. контура L , 2)-3) работу при перемещении вдоль кривой L в потоке жидкости или газа.

6.2 Вычисление криволинейного интеграла 2-го рода.

Замечательным образом вычисление криволинейного интеграла происходит по существенно более простой формуле, чем вычисление криволинейного интеграла в общем случае. В самом деле, касательный вектор, связанный с параметризацией $\vec{r} = (x(t), y(t), z(t))$ кривой L есть вектор скорости $\vec{r}' = (x'(t), y'(t), z'(t))$, имеющий длину $|\vec{r}'| = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}$, поэтому единичный касательный вектор

$$\vec{\tau} = \frac{\vec{r}'}{|\vec{r}'|} = \frac{1}{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}}(x'(t), y'(t), z'(t)).$$

Пусть $\vec{F} = (\vec{F}_x, \vec{F}_y, \vec{F}_z)$ — координатная запись вектора \vec{F} . Тогда, подставляя полученное выражение для $\vec{\tau}$ в интеграл $\int_L (\vec{F}, \vec{\tau})$ в момент его вычисления по формуле (16) получаем, что

$$\int_L (\vec{F}, \vec{\tau}) ds = \int_{\alpha}^{\beta} [F_x x'(t) + F_y y'(t) + F_z z'(t)] dt \quad (27)$$

— формула для вычисления криволинейного интеграла 2-го рода вдоль кривой L по гладкой параметризации $(x(t), y(t), z(t))$, $\alpha \leq t \leq \beta$ этой кривой; направление движения должно соответствовать росту параметра.

Эта формула показывает, что более информативной является следующая запись криволинейного интеграла 2-го рода:

$$\int_L (\vec{F}, \vec{\tau}) ds = \int_{\vec{L}} F_x dx + F_y dy + F_z dz,$$

где стрелка подсказывает, что при вычислении следует брать параметризации кривой, рост параметра которых соответствует выбранному направлению движения вдоль кривой.

6.3 Поверхностный интеграл 2-го рода.

Задача. Нахождение потока жидкости, протекающего через поверхность P в единицу времени в направлении, определенном непрерывным полем нормалей \vec{n} .

Предположим поверхность $P \subseteq$ находится в потоке жидкости, скорость которого в точке $\xi \in P$ равна $\vec{v}(\xi)$. Как найти количество жидкости, протекшей через эту поверхность в единицу времени?

Если поверхность P есть часть D плоскости с единичным вектором нормали \vec{n} область, а скорость течения одна и та же в каждой точке $M \in D$ и равна \vec{v} , то очевидно, что объем жидкости, протекшей через D в единицу времени равен объему наклонной призмы с основанием D и длиной ребер $|\vec{v}|$, т.е. призмы с основанием D и высотой (\vec{v}, \vec{n}) . Объем этой призмы равен произведению площади основания $\mu(D)$ на высоту (\vec{v}, \vec{n}) , т.е. этот объем равен $(\vec{v}, \vec{n})\mu(D)$.

Разобьем поверхность на куски $\sigma = \{P_i\}_{i=1}^n$, достаточно мелкие для того, чтобы считать, что скорость потока жидкости через P_i в первом приближении постоянна и равна $\vec{v}(\xi_i)$, где $\xi_i \in P_i$ — некоторая (любая) точка этого участка P_i поверхности. Можно считать, что в первом приближении область P_i является плоской и расположенной в касательной плоскости $T(\xi_i)$ к поверхности P в точке ξ_i , имеющей единичную нормаль $\vec{n}(\xi_i)$. Тогда, по замеченному выше, объем жидкости, протекшей через участок P_i , приблизительно равен $(\vec{v}, \vec{n})(\xi_i)\mu(P_i)$. Отсюда, объем жидкости, протекшей через поверхность P в направлении \vec{n} приблизительно равен

$$\sum_{i=1}^n (\vec{v}, \vec{n})(\xi_i)\mu(P_i) = I_\sigma((\vec{v}, \vec{n})).$$

Переходя в этом рассуждении к пределу, когда $\text{diam } \sigma \rightarrow 0$, получаем точное равенство:

$$\text{количество жидкости, протекшей через единицу времени} = \iint_P (\vec{v}, \vec{n}) dS.$$

Определение. Поверхностным интегралом 2-го рода называется интеграл вида

$$\iint_P (\vec{v}, \vec{n}) dS,$$

где \vec{v} — векторное поле на поверхности $P \subseteq \mathbb{R}^3$, а \vec{n} есть непрерывное поле единичных нормальных векторов на поверхности P , определяющее направление движения через поверхность (*ориентацию поверхности*).

Мы видим, что если векторное поле \vec{v} интерпретировать как поле скоростей течения жидкости, то поверхностный интеграл 2-го рода $\iint_P (\vec{v}, \vec{n}) dS$ есть количество жидкости (поток), протекшей через поверхность P за единицу времени. Соответственно, и в случае произвольного поля \vec{v} интеграл $\iint_P (\vec{v}, \vec{n}) dS$ называется *поток векторного поля \vec{v} через поверхность P в направлении (единичных нормалей) \vec{n}* .

6.4 Вычисление поверхностного интеграла 2-го рода.

Замечательно, что и в случае поверхностного интеграла 2-го рода его вычисление происходит по формулам более простым, чем вычисление поверхностного интеграла в общем случае. Проверим это для поверхности P , являющейся графиком гладкой функции $z = \varphi(x, y)$.

Как нам известно (см. (21), единичный вектор нормали \vec{n} , сонаправленный с осью Oz , имеет координаты

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2}} \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial x}, -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, 1 \right).$$

Поэтому при подстановке в вычислительную формулу (22) квадратные корни сократятся и для $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ получаем:

$$\iint_P (\vec{v}, \vec{n}) dS = \iint_D \left[-v_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} - v_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} + v_z \right] dx dy \quad (28)$$

— формула для вычисления потока векторного поля $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ через поверхность, являющуюся графиком гладкой функции $z = \varphi(x, y)$, $(x, y) \in D$, в направлении "снизу вверх", т.е. в направлении, составляющем с осью Oz острый угол.